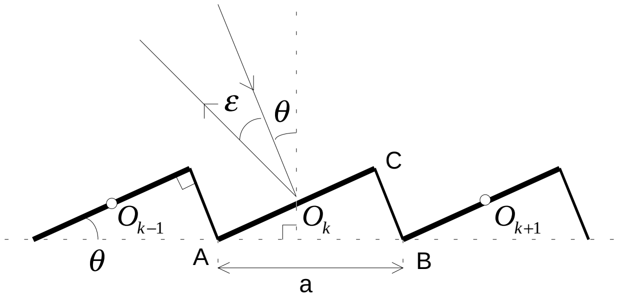
-EXERCICE 30.9-

• ENONCE :

« Réseau échelette »



Un réseau "échelette" par **réflexion** est constitué de N bandes réfléchissantes de faible largeur AC par rapport à leur dimension perpendiculaire au plan de la figure.
Ces bandes sont inclinées par rapport au plan du réseau, de pas a=AB.
Les bandes de type BC sont non réfléchissantes.

• Le réseau est éclairé par une onde plane monochromatique, perpendiculairement aux bandes réfléchissantes.

1) En admettant que l'on peut appliquer le principe d'Huygens-Fresnel aux bandes AC, déterminer l'éclairement $E_1(\varepsilon)$ diffracté par l'une de ces bandes dans la direction d'angle ε très faible avec la direction incidente.

2) Calculer l'éclairement total $E(\varepsilon)$ diffracté par le réseau dans la direction ε.

3) On constate que dans la direction $\varepsilon = 0$, l'éclairement est maximum dans l'ordre $p = 4$; sachant que la longueur d'onde incidente est $\lambda = 0,6\ \mu m$ et que le réseau comporte $n = 250$ bandes par millimètre, calculer l'angle θ du réseau.

4) Calculer les éclairements diffractés dans les directions correspondant aux maximums principaux d'ordre $p \neq 4$ et conclure.

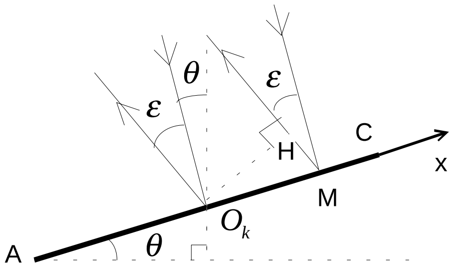
Rq : on dit que le réseau échelette est « blazé » dans l'ordre 4 pour la longueur d'onde utilisée (to blaze=briller d'un vif éclat…).

5) Peut-on, à partir des résultats précédents, interpréter les couleurs très vives du plumage d'oiseaux comme les paons ? (idem pour les ailes de papillons etc…)

• CORRIGE :

« Réseau échelette »

1)



Il faut déjà calculer la différence de marche entre un rayon diffracté en un point courant M et un rayon diffracté au centre de la bande AC.
D'après le théorème de Malus, cette différence de marche sera égale à:
$\delta = MH = O_k M \sin\varepsilon = x \sin\varepsilon$
On en déduit le déphasage entre ces 2 rayons:
$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi x \sin\varepsilon}{\lambda}$$

• D'après le principe d'Huygens-Fresnel, l'amplitude de la vibration lumineuse diffractée dans la direction ε par une « bandelette » de largeur dx, centrée sur le point M, s'écrit :

$$d\underline{s}(\varepsilon) = K\underline{s}_{0_k} \times \exp(-i\varphi) \times dx = K\underline{s}_{0_k} \times \exp(-i\frac{2\pi x \sin\varepsilon}{\lambda})dx$$

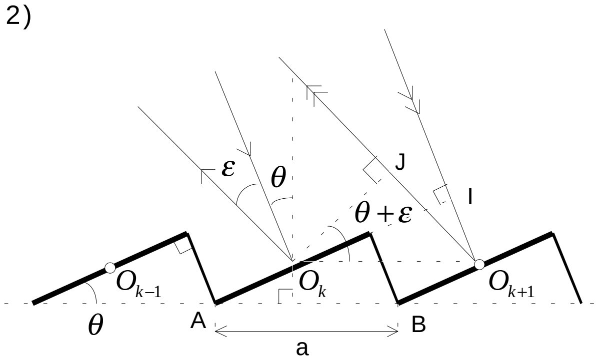
• On en déduit l'amplitude diffractée par une bande réfléchissante :

$$\underline{s}_1(\varepsilon) = K\underline{s}_0 \times \int_{-a\cos\theta/2}^{a\cos\theta/2} \exp(-i\frac{2\pi x \sin\varepsilon}{\lambda})dx = Ka\cos\theta\,\underline{s}_0 \times \sin_c(\frac{\pi a \cos\theta}{\lambda}\sin\varepsilon)$$

• Il vient alors :
$$\boxed{E_1(\varepsilon) = \underline{s}_1 \times \underline{s}_1^* = E_{max} \times \sin_c^2(\frac{\pi a \cos\theta}{\lambda}\sin\varepsilon)} \qquad (1)$$

Rq : on retrouve le résultat de la diffraction par une fente rectangulaire fine de largeur $a\cos\theta$.

2)



Il faut d'abord calculer la différence de marche entre 2 rayons diffractés par les milieux de 2 bandes réfléchissantes adjacentes.
Toujours d'après le théorème de Malus, cette différence de marche est égale à:
$\delta = IO_{k+1} + O_{k+1}J = O_kO_{k+1}\sin\theta + O_kO_{k+1}\sin(\theta+\varepsilon)$
$\Rightarrow \delta = a[\sin\theta + \sin(\theta+\varepsilon)]$

On en déduit le déphasage entre les 2 rayons considérés : $\boxed{\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi a}{\lambda}[\sin\theta + \sin(\theta+\varepsilon)]}$

• On effectue alors le calcul « classique » des interférences à l'infini pour N ondes, l'amplitude de la 1ère onde étant de la forme $\underline{s}_1(\varepsilon)$ et celle de la k-ème de la forme $\underline{s}_1(\varepsilon)\exp[-i(k-1)\varphi]$; d'où :

$$\boxed{E(\varepsilon) = E_1(\varepsilon) \times \left(\frac{\sin(N\varphi/2)}{N\sin(\varphi/2)}\right)^2}$$

($E_1(\varepsilon)$ est donné par la relation (1))

3) Dans la direction $\varepsilon = 0$, le terme de diffraction E_1 est maximum ; l'éclairement maximum est donc donné par les maximums principaux de la « fonction réseau », ce qui conduit à :

$$\varphi = 2p\pi, \text{ avec } \varphi = \frac{2\pi a}{\lambda}[\sin\theta + \sin(\theta+\varepsilon)] = \frac{4\pi a \sin\theta}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\sin\theta = \frac{p\lambda}{2a} = \frac{pn\lambda}{2} = 2n\lambda} \quad (2)$$

A.N : $\boxed{\theta = 0{,}305 rad = 17{,}5°}$

4) • Les maximums principaux dans les directions autres que $\varepsilon = 0$ sont donnés par :

$$\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda}[\sin\theta + \sin(\theta+\varepsilon)] = 2\pi(4+q), \text{ avec } q \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sin\theta + \sin(\theta+\varepsilon) = (4+q)\frac{\lambda}{a}$$

Avec ε petit, il vient : $\sin\theta + \sin(\theta+\varepsilon) = \sin\theta + \sin\theta\cos\varepsilon + \cos\theta\sin\varepsilon \simeq 2\sin\theta + \varepsilon\cos\theta = (4+q)\frac{\lambda}{a}$

Or, d'après la question 2) : $2\sin\theta = \frac{4\lambda}{a} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{q\lambda}{a\cos\theta}}$

• On peut alors reprendre l'expression de l'éclairement diffracté par une bande dans la direction ε pour trouver :

$$E_1(\varepsilon) = E_{max}\sin_c\left(\frac{\pi a\cos\theta}{\lambda}\sin\varepsilon\right) = E_{max}\sin_c\left(\frac{\pi a\cos\theta}{\lambda}\times\frac{q\lambda}{a\cos\theta}\right) = E_{max}\sin_c(q\pi) \Rightarrow \boxed{E_1(\varepsilon) = 0}$$

Conclusion : tous les maximums de la fonction réseau d'ordre $p \neq 4$ coïncident avec les annulations du terme de diffraction $\Rightarrow$ l'énergie lumineuse de l'onde incidente est concentrée dans le **seul** ordre 4 : a contrario, dans un réseau plan, l'énergie est répartie sur l'ensemble des ordres observables.

Rappelons également qu'à cause de la diffraction, les spectres d'ordre élevé d'un réseau plan sont moins lumineux, alors que ce sont eux pour lesquels le pouvoir de résolution du réseau est le plus grand (cours, chapitre 30) ; ici, en jouant sur l'angle θ, on peut travailler dans un ordre élevé **et** très lumineux.

5) • En ce qui concerne les couleurs des animaux, il faut distinguer ce qui est dû à la pigmentation (la couleur de la lumière réfléchie sera complémentaire de celle absorbée par les pigments) de ce qui dépend de la structure physique de la surface (on parle de « couleur structurale »).

• Les couleurs structurales sont essentiellement dues aux phénomènes d'interférences, de diffraction et de diffusion (franges d'égale épaisseur, irisations...).

• Les plumes de certains oiseaux et les ailes de papillons jouent le rôle du réseau échelette (structures plus ou moins périodiques) ; si l'on reprend la relation (2), on voit que θ et n étant fixés, le produit $p\times\lambda$ le devient : dans notre exemple, on constate que, dans le domaine du visible, un seul autre couple ($p = 5$ et $\lambda = 0{,}48\ \mu m$) convient.

La lumière réfléchie n'aura donc une forte intensité que pour quelques longueurs d'ondes, d'où l'effet « assez » monochromatique ; remarquons que pour un produit $p\times\lambda$ suffisamment petit, seul le bleu peut convenir (couleur très fréquente pour les animaux précédents).

Rq : à ce sujet, on peut signaler que si l'on extrait les **pigments jaunes** des plumes **vertes** des oiseaux à l'aide d'un solvant organique, elles apparaissent **bleues**, qui est la couleur **structurale**.